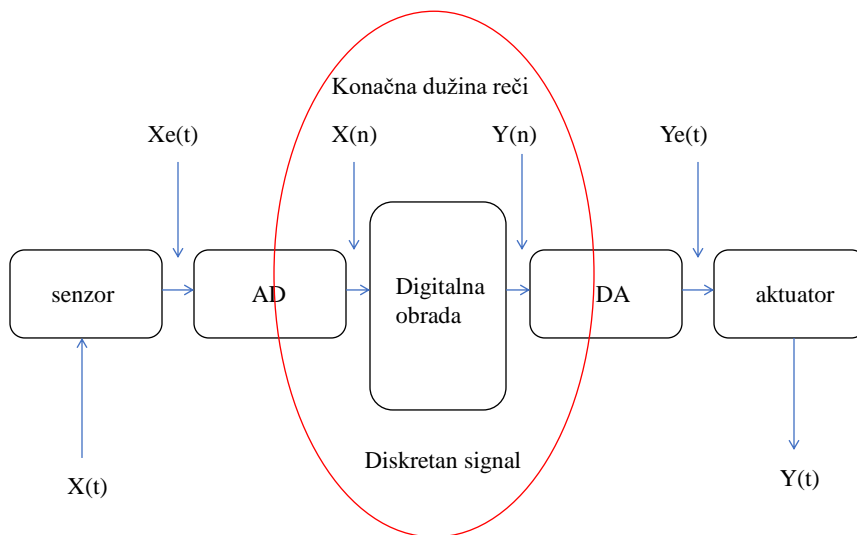


Uticaj konačne dužine digitalne reči



1



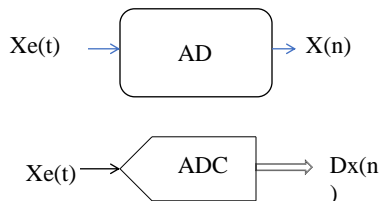
2

Analogno digitalna konverzija

AD Konvertori A/D Konvertori ADC

Ulaz - analogni napon

Izlaz – digitalna (binarna) vrednost srazmerna ulaznoj veličini



1. Odabiranje u vremenu, diskretizacija u vremenu
2. Diskretizacija po amplitudi

Ograničen signal na izlazu: broj mogućih vrednosti predstave brojeva
Ograničen signal na ulazu



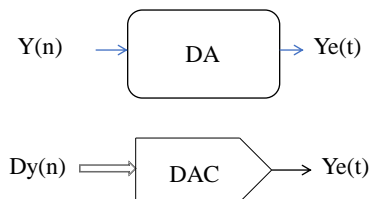
3

Digitalno analogna konverzija

DA Konvertori D/A Konvertori DAC

Ulaz – digitalna (binarna) vrednost

Izlaz – analogni napon srazmeran ulaznoj veličini



1. Diskretan po amplitudi
2. Kontinualan u vremenu

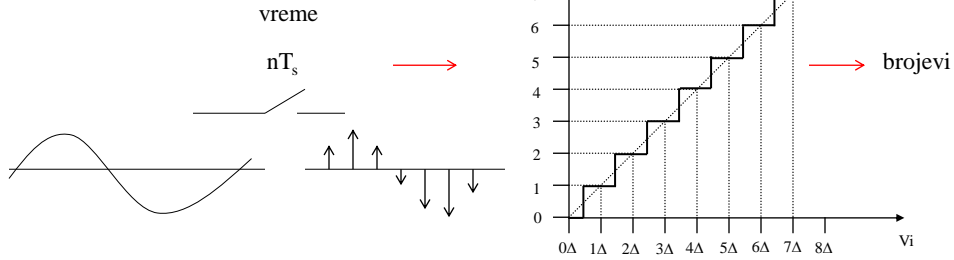
Ograničen signal na ulazu: broj mogućih vrednosti predstave brojeva
Ograničen signal na izlazu



4

AD

Diskretizacija
-vreme
-amplituda

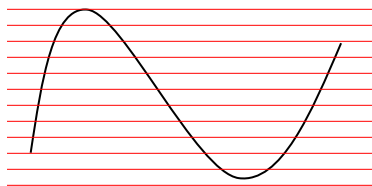


U većini konvertora se ovako i stvarno dešava

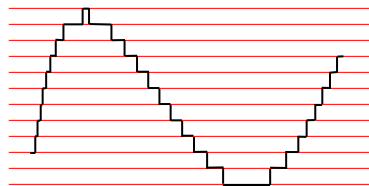


Za analizu može i obrnuto
prvo diskretizacija amplitude
pa diskretizacija u vremenu

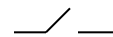
Diskretizacioni nivoi



Signal



Diskretizacija po amplitudi

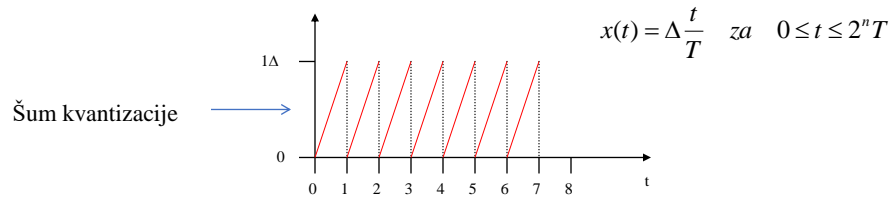


Odabiranje

Spektar?



Greška koju pravimo ako konvertujem signal linearan u vremenu



kao da smo kvantizovali signal

$$x_q(t) = \Delta \sum_{k=0}^{2^N-1} k p_t(t - kT) \quad \text{za } 0 \leq t \leq 2^n T \quad \text{gde je } p_t = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

odnosno, kao da smo na originalni signal “dodali” šum kvantizacije.



Šum kvantizacije $n_q(t) = x(t) - x_q(t)$

Srednja vrednost $\bar{n}_q = \frac{\Delta}{2}$

Snaga šuma kvantizacije

$$P_q = n_{qRMS}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T n_q^2(t) dt - \bar{n}_q^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{t}{T} \Delta \right)^2 dt - \left(\frac{\Delta}{2} \right)^2 = \frac{\Delta^2}{12}$$

Test signal = sinusoidalna signal maksimalne amplitude

$$P_s = \frac{\left(\Delta \frac{2^N - 1}{2} \right)^2}{2} = \frac{\Delta^2}{8} (2^N - 1)^2$$

$$SNR = \frac{P_s}{P_q} = \frac{3}{2} (2^N - 1)^2$$

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_q} \approx 6.02N + 1.76 \text{ dB}$$

Svaki dodatni bit
poboljšava odnos
signal šum za 6dB



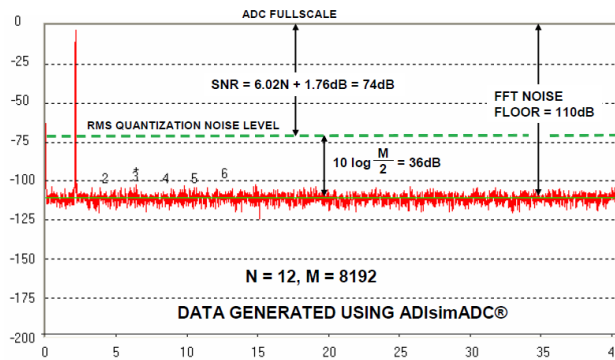
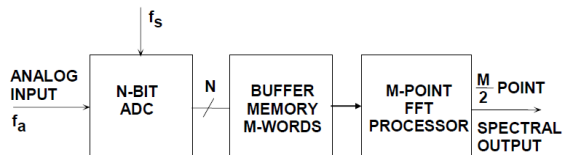
Kvantovanje amplitude

1. Greška kvantovanja $\varepsilon[n]$ ima uniformnu gustinu raspodele
2. Greška kvantovanja $\varepsilon[n]$ predstavlja stacionarni beli šum,
3. Greška kvantovanja $\varepsilon[n]$ nije korelisana sa signalom $x[n]$.

?

greška kvantovanja može smatrati za aditivni beli šum

$$SNR \text{ (dB)} = 10 \log \frac{P_x}{P_n}$$



**FFT Output for an Ideal 12-Bit ADC, Input = 2.111MHz,
 $f_s = 82\text{MSPS}$, Average of 5 FFTs, $M = 8192$,**



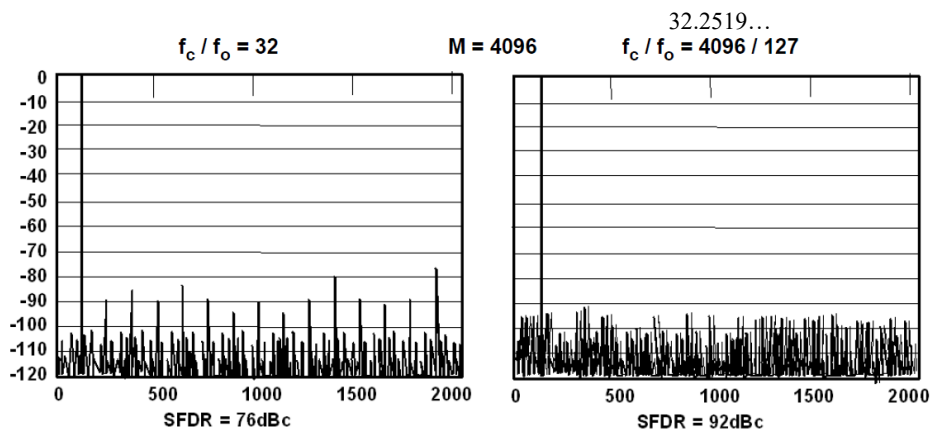


Figure 5.20: Effect of Ratio of Sampling Clock f_c to Output Frequency f_o on SFDR for Ideal 12-bit DAC

(ne)Koherentno generisanje signala – isti efekti kao i kod (ne)Koherentnog odabiranja



Nelinearni efekti

Ako se u nekom trenutku $t = t_0$ ukine pobudni signal stabilnog IIR diskretnog sistema, izlazni signal bi trebalo da asimptotski opada ka nuli. Međutim, ako se u realizaciji IIR sistema za predstavljanje signala i koeficijenata koristi konačan broj bita, izlazni signal može oscilovati ili imati konstantnu vrednost različitu od nule.

Taj efekat se naziva **granični ciklus** pri nultoj pobudi i posledica je nelinearnih pojava kod kvantovanja proizvoda ili prekoračenja opsega kod sabiranja.



Primer

$$y[n] = ay[n-1] + x[n], \quad |a| < 1$$

$$\hat{y}[n] = Q(a\hat{y}[n-1]) + \hat{x}[n]$$

Četiri bita

$$\hat{x}[n] = 0.875_{10} \delta[n] = 0.111_2 \delta[n]$$

n	$y[n]$	$\hat{y}[n]$	$y[n]$	$\hat{y}[n]$
0	0.875	0.875	0.875	0.875
1	0.4375	0.500	-0.4375	-0.500
2	0.21875	0.250	0.21875	0.250
3	0.109375	0.125	-0.109375	-0.125
4	0.0546875	0.125	0.0546875	0.125
5	0.02734375	0.125	-0.02734375	-0.125

$$a = 0.5_{10} = 0.100_2$$

$$a = -0.5$$



Analiza primera

$$|Q(a\hat{y}[n-1]) - a\hat{y}[n-1]| \leq 0.5 \cdot 2^{-B}$$

$$|Q(a\hat{y}[n-1])| = |\hat{y}[n-1]|$$

$$|\hat{y}[n-1]| - |a\hat{y}[n-1]| \leq 0.5 \cdot 2^{-B}$$

$$|\hat{y}[n-1]| \leq \frac{0.5}{1-|a|} 2^{-B} = k \cdot 2^{-B}$$

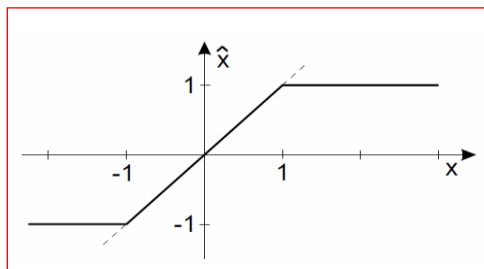
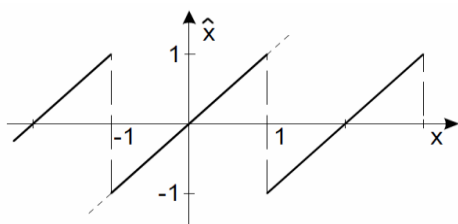
Dakle, vrednosti izlaznog signala u mrtvoj zoni su multipli od 2^{-B} . Ako je $|a| < 0.5$, granični ciklus se ne može pojaviti. Ako je $|a| \geq 0.5$, po prestanku pobude izlazni signal počinje da opada i zaustavlja se na vrednosti $k \cdot 2^{-B}$, ili osciluje između vrednosti $k \cdot 2^{-B}$ i $-k \cdot 2^{-B}$, sa učestanošću jednakom polovini učestanosti odabiranja.



Granični ciklusi zbog prekoračenja opsega pri sabiranju

Druga vrsta nelinearnih efekata kod sistema za digitalnu obradu signala su granični ciklusi koji nastaju kao posledica prekoračenja opsega kod sabiranja. Kao što je već rečeno, u digitalnim sistemima za obradu signala se najčešće koristi komplement dvojke za predstavljanje bipolarnih signala i koeficijenata. Uobičajeno je da se svi signali i koeficijenti normalizuju na opseg $-1 \leq x < 1$.

I pored normalizacije može doći do prekoračenja opsega ako su oba sabirka istog znaka a po modulu su veći od 0.5.



Kvantovanje koeficijenata IIR – uticaj na položaj polova

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$\hat{a}_k = a_k + \Delta a_k \text{ i } \hat{b}_k = b_k + \Delta b_k$$

$$\hat{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^M \hat{b}_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N \hat{a}_k z^{-k}}$$



$$D(z) = 1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} = \prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1}) \quad D(z) = \prod_{i=1}^N \left(\frac{z - p_i}{z} \right) = z^{-N} \prod_{i=1}^N (z - p_i)$$

$$z = p_i + \Delta p_i \quad \Delta p_i = \sum_{k=1}^N \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \Delta a_k, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\left(\frac{\partial D(z)}{\partial a_k} \right)_{z=p_i} = \left(\frac{\partial D(z)}{\partial p_i} \right)_{z=p_i} \frac{\partial p_i}{\partial a_k}, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, N$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \left. \frac{\left(\frac{\partial D(z)}{\partial a_k} \right)}{\left(\frac{\partial D(z)}{\partial p_i} \right)} \right|_{z=p_i} = \left. \frac{z^{-k}}{-z^{-N} \prod_{j=1, j \neq i}^N (z - p_j)} \right|_{z=p_i}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{-p_i^{N-k}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (p_i - p_j)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, N$$

Osetljivost polova na promenu koeficijenta



Ako su polovi funkcije prenosa bliski (što je karakteristično za vrlo selektivne funkcije prenosa), onda male greške koeficijena polinoma u imeniocu mogu izazvati velike pomeraje polova u direktnim realizacionim strukturama.

Sa porastom broja polova u grupi, osetljivost polova na promene koeficijena raste.

Iz tog razloga se, ako je broj polova veći od 3, umesto direktnih struktura koriste kaskadne ili paralelne realizacione strukture.

Kod takvih struktura se svaki par konjugovano kompleksnih polova realizuje nezavisno od ostalih polova. Zbog toga je pomeraj pola zbog greške kvantovanja koeficijena nezavisan od položaja ostalih polova funkcije prenosa. Kod kaskadne realizacije ista osobina važi i za nule funkcije prenosa.

Kod paralelne realizacije, pomeraj nula zavisi od kvantovanja svih koeficijena polinoma u brojiocu i imeniocu funkcije prenosa.

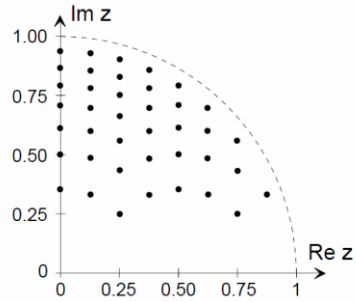
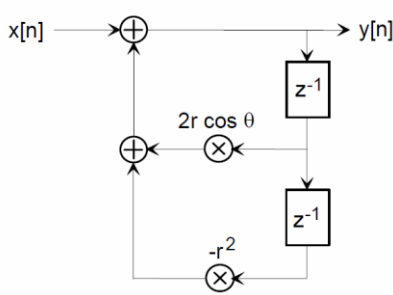
I pored toga, pokazuje se da je paralelna realizacija ipak bolja od direktnih realizacija u pogledu osetljivosti na kvantovanje koeficijena zbog male osetljivosti pojedinačnih sekcija drugog reda.

Kaskadna struktura je manje osetljiva na kvantovanje koeficijena od paralelne realizacije, a obe su znatno bolje od direktnih realizacija.



Kvantovanje koeficijenata IIR – uticaj na položaj polova - primer

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{1}{1 - (2r \cos \theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$



Mogući položaji polova sa četiri bita
Drugi komplement, znak i tri bita

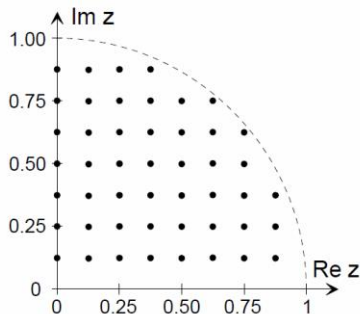
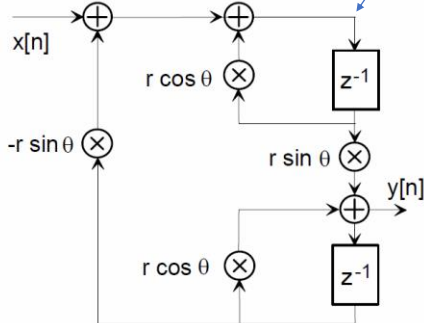


Spregnuta forma – za realizaciju bikvadratnih sekcija
Smanjen uticaj kvantovanja koeficijenata na položaj polova

$$H(z) = \frac{r \sin \theta z^{-1}}{1 - (2r \cos \theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$y(n) = r \sin \theta y_1(n-1) + r \cos \theta y(n-1)$$

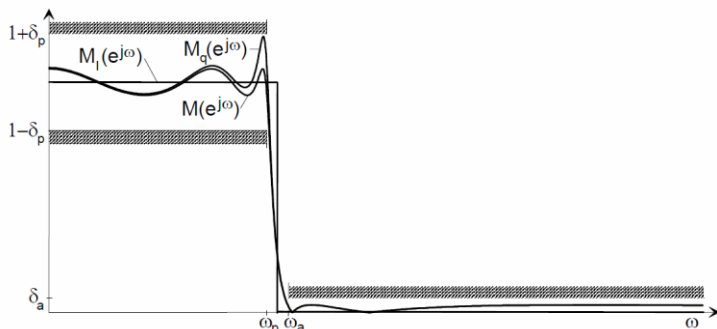
$$y_1(n) = x(n) + r \cos \theta y_1(n-1) - r \sin \theta y(n-1)$$



$$H(z) = \frac{r \sin \theta z^{-1}}{1 - r \cos \theta z^{-1} - r \cos \theta z^{-1} + r \cos \theta z^{-1} \cdot r \cos \theta z^{-1} + r \sin \theta z^{-1} \cdot r \sin \theta z^{-1}}$$



Određivanje potrebnog broja bita za realizaciju IIR funkcije prenosa



$$\Delta M(\Omega) = M(e^{j\Omega}) - M_q(e^{j\Omega})$$

$$\Delta M_{\max}(\Omega) = \begin{cases} \delta_p - |M(e^{j\Omega}) - M_I(e^{j\Omega})| & \Omega \leq \Omega_p \\ \delta_a - |M(e^{j\Omega}) - M_I(e^{j\Omega})| & \Omega \geq \Omega_a \end{cases}$$



Optimalna dužina reči je minimalna dužina reči za koju važi uslov

$$\Delta M(\Omega) \leq \Delta M_{\max}(\Omega) \quad \text{računski}$$

Statističko posmatranje zaokruživanja koeficijenata

$$-q/2 \leq \Delta c_i \leq q/2 \quad p(\Delta c_i) = \frac{1}{q}$$

Predstava brojeva drugi komplement 1+B bita

$$\sigma_{\Delta c_i}^2 = \int_{-q/2}^{q/2} (\Delta c_i)^2 p(\Delta c_i) d(\Delta c_i) = \frac{q^2}{12} = \frac{2^{-2B}}{12}$$

$$\Delta M(\Omega) = \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial M(\Omega)}{\partial c_i} \Delta c_i = \sum_{i=1}^{N_c} S_{c_i} \Delta c_i$$



$$E\{\Delta M\} = \sum_{i=1}^{N_c} S_{c_i} E\{\Delta c_i\} = 0$$

Srednja vrednost jednaka nuli ako su statistički nezavisne netačnosti koeficijenata

$$\sigma_{\Delta M}^2 = \sum_{i=1}^{N_c} S_{\Delta c_i}^2 \sigma_{\Delta c_i}^2 = \frac{q^2}{12} \sum_{i=1}^{N_c} S_{\Delta c_i}^2 = \frac{q^2}{12} S_T^2$$

$$p(\Delta M) = \frac{1}{\sigma_{\Delta M} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta M)^2}{2\sigma_{\Delta M}^2}}$$

Gausova raspodela, Nc veliko, centrala granična teorema

$$y = \Pr(|\Delta M| \leq \Delta M_1) = \frac{2}{\sigma_{\Delta M} \sqrt{2\pi}} \int_0^{\Delta M_1} e^{-\frac{(\Delta M)^2}{2\sigma_{\Delta M}^2}} d(\Delta M)$$



$$\Delta M = x \sigma_{\Delta M} \text{ i } \Delta M_1 = x_1 \sigma_{\Delta M} \quad \text{smena}$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Standardni oblik
Numeričko izračunavanje,
nema zatvorene forme

$$\Delta M_1 \leq \Delta M_{\max}(\Omega) \quad \text{Biće manje sa faktorom pouzdanosti } y$$

$$q \leq \frac{\sqrt{12} \Delta M_{\max}(\Omega)}{x_1 S_T}$$

$$B = \log_2 \frac{1}{q} = \log_2 \frac{x_1 S_T}{\sqrt{12} \Delta M_{\max}(\Omega)}$$

$x_1=2, y=0.95$



Kvantovanje koeficijenata FIR – uticaj na položaj nula

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{-p_i^{N-k}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (p_i - p_j)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, N \quad \text{izvedeno}$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial b_k} = \frac{-z_i^{M-1-k}}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} (z_i - z_j)}, \quad i = 0, \dots, M-1, \quad k = 0, \dots, M-1$$

Na isti način



U praksi se nule funkcije prenosa nalaze u opsegu učestanosti koji odgovara nepropusnom opsegu i nisu grupisane.

Zbog toga imenilac funkcije ne može imati male vrednosti, pa osetljivost nula na promene koeficijenata nije velika, čak ni kod direktne realizacije višeg reda.

Pošto je direktna realizacija najjednostavnija, a nije mnogo osetljiva, FIR funkcije prenosa se najčešće realizuju nekom od direktnih realizacija, a vrlo retko u vidu kaskadne strukture.

$$h[n] = \pm h[M - 1 - n]$$

uslov linearnosti faze biće zadovoljen i posle kvantovanja koeficijenata



$$\hat{H}(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) + \Delta H(e^{j\Omega})$$

$$\Delta H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} \Delta h[n] e^{-j\Omega n}$$

$$-\frac{q}{2} \leq \Delta h[n] \leq \frac{q}{2}$$

$$|\Delta H(e^{j\Omega})| = \left| \sum_{n=0}^{M-1} \Delta h[n] e^{-j\Omega n} \right| \leq \sum_{n=0}^{M-1} |\Delta h[n]| |e^{-j\Omega n}| \leq \frac{Mq}{2} = 2^{-(B+1)} M$$

Suviše pesimistički



Izračunavanje DFT i šum kod FIR struktura

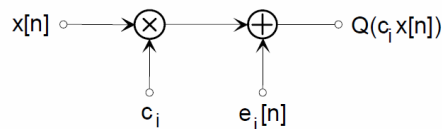
Efekti konačne dužine reči kod izračunavanja DFT manifestuju se na dva načina.

Prvi uzrok grešaka, koji nastaje zbog nemogućnosti tačnog izračunavanja sinusa i kosinusa, sličan je efektu kvantovanja koeficijenata kod filtarskih struktura.

Drugi uticaj konačne dužine reči nastaje zbog kvantovanja proizvoda i manifestuje se kao šum na izlazu.

Kvantovanje proizvoda

$$Q(c_i x[n]) = c_i x[n] + \varepsilon_i[n]$$



Kvantovanje proizvoda

Spektralna gustina snage šuma na izlazu data je izrazom:

$$S_y(e^{j\Omega}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{N_s} k_j |G_j(e^{j\Omega})|^2 = \frac{q^2}{12} \sum_{j=1}^{N_s} k_j |G_j(e^{j\Omega})|^2$$

$$q = 2^{-B} \quad \begin{array}{l} \text{Korak} \\ \text{kvantovanja} \end{array}$$

k_j broj množača povezan na taj sabirač

N_s ukupan broj sabirača

G_j funkcija prenosa od sabirača do izlaza



FIR svi izvori šuma se pridružuju izlaznom sabiraču

$$k_j = 1, G_j = 1, N_s = M$$

Zaokruživanje pre sabiranja

$$\sigma_y^2 = S_y(e^{j\Omega}) = M \frac{q^2}{12} = M \frac{2^{-2B}}{12}$$

Zaokruživanje posle sabiranja

$$\sigma_y^2 = S_y(e^{j\Omega}) = \frac{q^2}{12} = \frac{2^{-2B}}{12}$$



DFT – sličan računanju FIRa

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Jedno kompleksno množenje jednako 4 realna množenja

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = 4N \frac{q^2}{12} = N \frac{q^2}{3} = \frac{N}{3} 2^{-2B}$$



Izračunavanje DFT – da ne bi došlo do prekoračenja

$$|X[k]| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]| < N, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{Ako je} \quad |x[n]| < 1$$

Ako je i $X[k]$ normalizovano

za sigurno sprečavanje
prekoračenja, dovoljno je
podeliti ulazni signal sa N .

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]| < 1$$

Međutim

Posmatrajmo sada ulaznu sekvencu $x[n]$ koja predstavlja beli šum čije vrednosti, posle skaliranja, leže u opsegu $-1/N \leq x(n) < 1/N$

$$\sigma_x^2 = \frac{(2/N)^2}{12} = \frac{1}{3N^2} \quad \sigma_X^2 = N\sigma_x^2 = \frac{1}{3N} \quad \frac{\sigma_X^2}{\sigma_{\varepsilon}^2} = \frac{1}{q^2 N^2} = \frac{2^{2B}}{N^2}$$



Kao primer, posmatrajmo sekvencu od 1024 odbirka. Ako je potrebno ostvariti odnos signal-šum od 30 dB

$$\frac{\sigma_X^2}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{1}{q^2 N^2} = \frac{2^{2B}}{N^2}$$

dobija se da je potrebna tačnost množenja i sabiranja $B = 15$ bita.

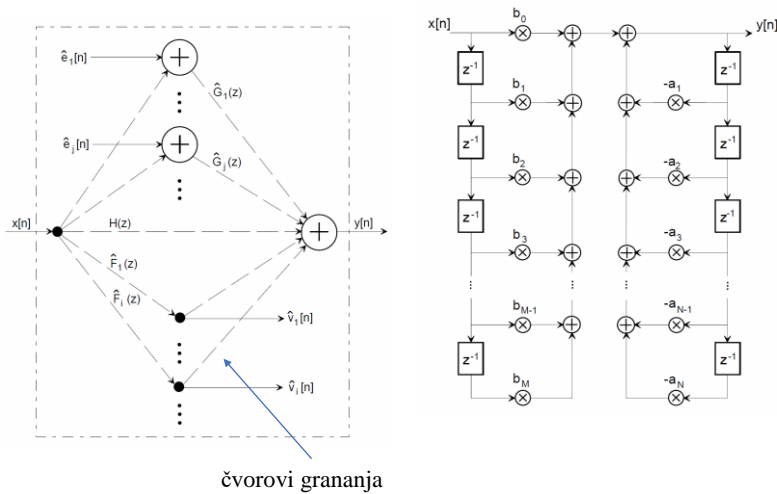
Stoga se ponekad odustaje od skaliranja ulazne sekvence već se samo zahteva da bude $x[n] < 1$. Tada se mora obezbediti dovoljno veliki dinamički opseg sabirača, jer je $X[k] < N$

$$\sigma_x^2 = 1/3 \quad \sigma_X^2 = N\sigma_x^2 = N/3 \quad \frac{\sigma_X^2}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{1}{q^2} = 2^{2B}$$

Svega 5 bita



Skaliranje koeficijenta funkcije prenosa



$$x[n] \leq M$$

Dinamički opseg M se maksimalno koristi

$$v_i[n] \leq M, \quad i = 1, 2, \dots$$

u vremenskom domenu, impulsni odziv f, pa konvolucija

$$v_i[n] = \sum_{k=0}^{\infty} f_i[k] x[n-k], \quad i = 1, 2, \dots$$

$$|v_i[n]| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_i[k]| |x[n-k]| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} |f_i[k]|, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$|\hat{v}_i[n]| \leq M, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}_i[k]| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

Suviše strog
uslov



Frekventni domen

L_p norma

$$\|H\|_p = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\Omega})|^p d\Omega \right]^{1/p}$$

$p=1$ dobija L_1 predstavlja srednju vrednost apsolutne vrednosti funkcije $H(e^{j\Omega})$

$p=2$ dobija L_2 predstavlja koren iz srednje vrednosti kvadrata funkcije $H(e^{j\Omega})$

$$\|H\|_{\infty} = \max_{-\pi \leq \Omega \leq \pi} |H(e^{j\Omega})|$$



$$|h[n]| \leq \|H\|_1 \leq \|H\|_2 \leq \dots \leq \|H\|_\infty \quad \text{važi}$$

$$\|X\|_1 \leq M$$

$$v_i[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_i(e^{j\Omega}) X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$|v_i[n]| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_i(e^{j\Omega})| |X(e^{j\Omega})| d\Omega \leq \|F_i\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})| d\Omega \leq \|F_i\|_\infty \|X\|_1$$

Neće se desiti prekoračenje ako posle skaliranja važi

$$\|\hat{F}_i\|_\infty \leq 1$$

Još blaži kriterijum za
signale koji imaju konačnu
energiju

$$\|\hat{F}_i\|_2 \leq 1$$



Praktično izvođenje skaliranja

$$\hat{F}_i(z) = s_i F_i(z) \quad \|\hat{F}_i\|_p = s_i \|F_i\|_p \leq 1$$

$$s_i \leq \frac{1}{\|F_i\|_p} \quad p=2 \text{ ili } \infty$$

A za vremenski domen

$$s_i \leq \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} |f_i[k]|}$$

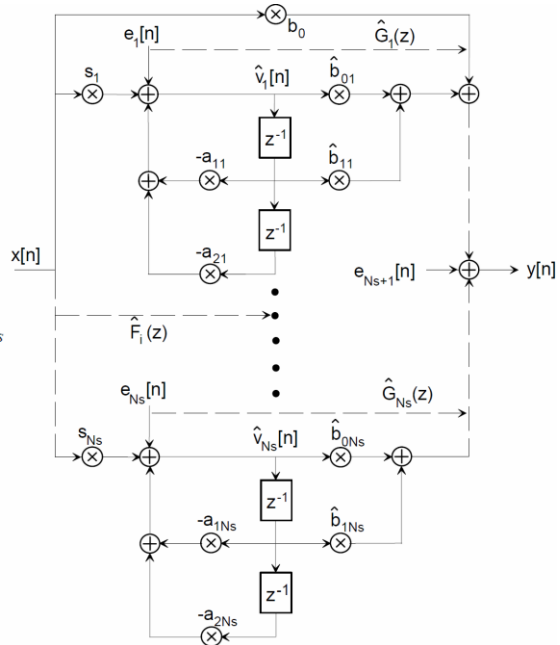


Paralelna realizacija P1

$$\hat{b}_{0i} = \frac{b_{0i}}{s_i}, \quad \hat{b}_{li} = \frac{b_{li}}{s_i}, \quad i = 1, \dots, N_s$$

$$\hat{G}_i(z) = \frac{\hat{b}_{0i} + \hat{b}_{1i}z^{-1}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}, \quad i = 1, \dots, N_s$$

$$F_i(z) = \frac{1}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}, \quad i = 1, \dots, N_s$$



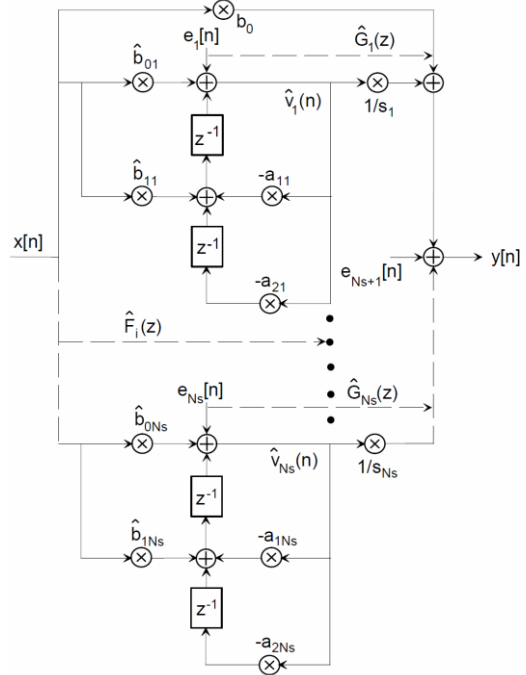
Paralelna realizacija P2

$$\hat{b}_{0i} = s_i b_{0i}, \quad \hat{b}_{li} = s_i b_{li}, \quad i = 1, \dots, N_s$$

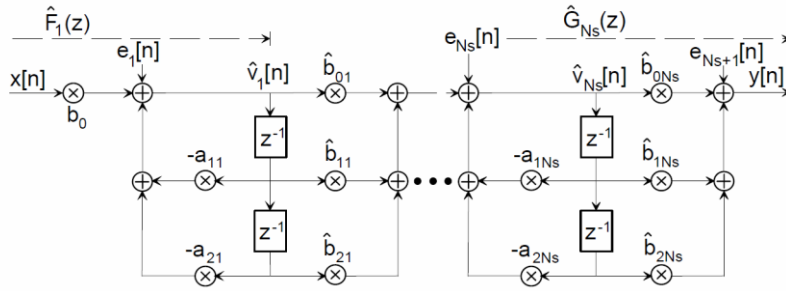
$$F_i(z) = \frac{\hat{b}_{0i} + \hat{b}_{1i}z^{-1}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}, \quad i = 1, \dots, N_s$$

$$\hat{G}_i(z) = \frac{1}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}, \quad i = 1, \dots, N_s$$

Ako nema dodatnih zahteva onda P1, bolja u pogledu šuma



Kaskadna realizacija K1



$$\hat{F}_i(z) = \frac{\hat{b}_0}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}} \prod_{k=1}^{i-1} \hat{H}_k(z), \quad i = 1, \dots, N_s$$

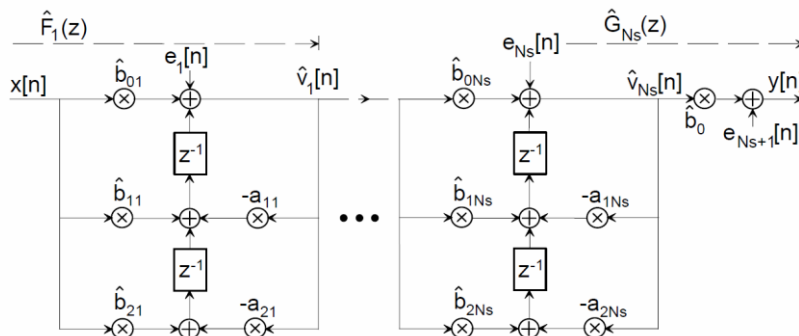
$$\hat{G}_i(z) = \prod_{k=i}^{N_s} \hat{H}_k(z), \quad i = 1, \dots, N_s$$

$$\hat{b}_0 = s_i$$

$$\hat{b}_{ki} = \frac{s_{i+1}}{s_i} b_{ki}, \quad k = 0, 1, 2, \quad i = 1, \dots, N_s$$



Kaskadna realizacija K2



$$\hat{F}_i(z) = \prod_{k=1}^i \hat{H}_k(z), \quad i = 1, \dots, N_s$$

$$\hat{G}_i(z) = \frac{\hat{b}_0}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}} \prod_{k=i+1}^{N_s} \hat{H}_k(z), \quad i = 1, \dots, N_s$$

$$\hat{b}_{ki} = \frac{s_i}{s_{i-1}} b_{ki}, \quad k = 0, 1, 2, \quad i = 1, \dots, N_s$$

$$\hat{b}_0 = \frac{b_0}{s_{N_s}}$$



Kaskadna realizacija

Sparivanje polova i nula

Prvo se uoči par polova najbliži jediničnom krugu i par nula koji mu je najbliži i formira se funkcija prenosa $H_1(z)$.

Zatim se uoči sledeći par polova najbliži jediničnom krugu i spari sa najbližim parom nula.

Postupak se nastavlja sve dok se ne izvrši sparivanje svih polova i nula.

Redosled:

ako se koristi realizacija K2, optimalno je da sekcije sa najvećom varijacijom pojačanja budu postavljene na početku kaskade,

a ako se koristi realizacija K1, na kraju kaskade



Paralelnu strukturu je jednostavnije projektovati jer se ne vrši sparivanje nula i polova niti određivanje redosleda, a i postupak skaliranja je jednostavniji.

Ekperimentalni rezultati pokazuju da je nivo šuma na izlazu paralelne realizacije P1 istog reda kao kod optimalnih kaskadnih realizacija. Uticaj kvantovanja koeficijenata takođe je manji kod paralelne realizacije.

Dakle, moglo bi se reći da je paralelna realizacija P1 optimalna realizaciona struktura. Međutim, i kaskadna realizacija ima svojih prednosti. Pre svega, u najčešćem slučaju kada se sinteza vrši bilinearnom transformacijom klasičnih analognih funkcija prenosa, nule digitalne funkcije prenosa leže na jediničnom krugu pa se može uštedeti 25% ili čak i 50% množača. Drugo, nule se ne pomeraju sa jediničnog kruga zbog kvantovanja koeficijenata, što povoljno utiče na amplitudsku karakteristiku u nepropusnom opsegu.



Zadatak 3 (15 poena)

Digitalni kauzalni rekurzivni filter drugog reda definisan je sledećom diferencnom jednačinom

$$y[n] = \frac{7}{8}y[n-1] - \frac{5}{8}y[n-2] + x[n]$$

Kvantizacija se vrši na izlazu poslednjeg sabirača, zaokruživanjem, i to na 4 bita (označeni brojevi u drugom komplementu u opsegu -1 do 1). Pobudni signal $x[n]$ se takođe predstavlja sa 4 bita.

a) [10] Skicirajte navedeni sistem i proverite da li dolazi do graničnog ciklusa usled prekoračenja ako se sistem pobudi signalom

$$x[n] = -0.75_{10}\delta[n] - 0.625_{10}\delta[n-1]$$

i ako za početne uslove važi da je $y[-2] = y[-1] = 0$.

b) [5] Na koji način se mogu izbeći granični ciklusi usled prekoračenja



HINT: Na izlazu:

Maksimalan pozitivan broj $0111 = 0.111 = 7/8 = 0.875$

Minimalan pozitivan broj $0001 = 0.001 = 1/8 = 0.125$

Minimalan negativan broj $1000 = 1.000 = -1$

Maksimalan negativan broj $1111 = 1.111 = -1/8 = -0.125$

Odsecanje

$$46/64 = 40/64 + 6/64 = 5/8$$

Zaokruživanje

$$46/64 = 40/64 + 6/64 = 6/8$$

Prekoračenje

$$7/8 + 7/8 = 14/8 = 16/8 - 2/8 = -2/8$$

$$0.111 + 0.111 = 1.110 = -2/8$$



$$y[n] = \frac{7}{8}y[n-1] - \frac{5}{8}y[n-2] + x[n]$$

$$0.75 = 6/8$$

$$0.625 = 5/8$$

$$X[0] = -6/8, X[1] = -5/8,$$

$$Y[0] = 7/8 * 0 - 5/8 * 0 + (-6/8) = -6/8 \text{ OK}$$

$$Y[1] = 7/8 * (-6/8) - 5/8 * 0 + (-5/8) = -42/64 + (-5/8)$$

Na množačima neće nastati prekoračenje. Prekoračenje nastaje na sabiraču.

$$-42/64 + (-5/8) = -82/64 = -(128-46)/64 = 46/64$$

Sve svedeno na 8 i zaokruživanje "manjih" vrednosti.

$$46/64 = 40/64 + 6/64 = 5/8 + 1/8 = 6/8 \text{ (6/64=0.000110)}$$

$$Y[2] = 7/8 * (6/8) - 5/8 * (-6/8) = +72/64 = (128-56) = -56/64 = -7/8$$

$$Y[3] = 7/8 * (-7/8) - 5/8 * (6/8) = -79/64 = -(128-49)/64 = 49/64 = 48/64 + 1/64 = 6/8$$

$$Y[4] = -6/8$$

$$Y[5] = 7/8$$

$$Y[6] = -6/8$$

$$Y[7] = 6/8$$

$$Y[8] = -7/8$$

.....

